language: Hungarian

3rd Middle European Mathematical Olympiad

Csapatverseny

2009. szeptember 27.

T-1. feladat

Legyenek x, y, z valós számok, melyekre $x^2 + y^2 + z^2 + 9 = 4(x + y + z)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 8(x^3 + y^3 + z^3) + 27$$

és határozzuk meg, mikor áll fenn egyenlőség.

T-2. feladat

Az a, b, c valós számokra fennáll, hogy az

$$x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + cx + a = 0$$

egyenletek közül bármely kettőhöz pontosan egy olyan valós szám van, amely mindkettőt kielégíti. Határozzuk meg $a^2 + b^2 + c^2$ összes lehetséges értékét.

T-3. feladat

Egy táblára a $0, 1, 2, \ldots, n$ $(n \geqslant 2)$ számok vannak felírva. Minden lépésben letörlünk a tábláról egy számot, amely két, még a táblán lévő különböző szám számtani közepe. Ezt addig csináljuk, amíg már nincs olyan szám a táblán, amit le lehetne törölni. Jelölje $g(n)$ azt, hogy legkevesebb hány szám maradhat végül a táblán. Adjuk meg $g(n)$-et minden n-re.

T-4. feladat

Egy 2009×2009-es tábla minden mezőjét n szín valamelyikére színezzük (nem kell feltétlenül minden színt használni). Egy színt *összefüggő*nek nevezünk, ha vagy csak egy ilyen színű mező van, vagy bárhogyan választva két ilyen színű mezőt el lehet jutni az egyikből a másikba egy vezérrel lépkedve olyan módon, hogy közben egyszer sem lépünk más színű mezőre (egy vezér vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan léphet). Adjuk meg a legnagyobb n egészt, melyre minden színezés esetén a táblán szereplő színek közül legalább egy összefüggő.

T-5. feladat

Legyen $ABCD$ egy paralelogramma, melyre $BAD\sphericalangle = 60°$, az átlók metszéspontját jelölje E. Az ACD háromszög körülírt köre a BA egyenest K-ban $(K \neq A)$, a BD egyenest P-ben $(P \neq D)$ és a BC egyenest L-ben $(L \neq C)$ metszi. Az EP egyenes és a CEL háromszög körülírt köre az E és M pontokban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy a KLM és CAP háromszögek egybevágóak.

T-6. feladat

Tegyük fel, hogy az $ABCD$ húrnégyszögben $CD = DA$. Az E illetve F pontok az AB ill. BC

szakaszokon vannak, és teljesül rájuk, hogy $ADC\sphericalangle = 2EDF\sphericalangle$. Legyen DK ill. DM a DEF háromszög magasság- ill. súlyvonala. Jelölje L a K pontnak az M-re vonatkozó tükörképét. Bizonyítsuk be, hogy a DM és BL egyenesek párhuzamosak.

T-7. feladat
Adjuk meg az összes (m, n) egész számpárt, mely kielégíti az alábbi egyenletet:

$$(m+n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

T-8. feladat
Adjuk meg az összes nemnegatív egész megoldását az alábbi egyenletnek:

$$2^x + 2009 = 3^y 5^z.$$

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.